Processi di Markov di nascita e morte

- classe di p.s. Markoviani con
  - * spazio degli stati E=***N***
  - * vincoli sulle transizioni

- soluzione esprimibile in forma chiusa

- stato k ***N***
- transizioni

  k → k+1 nascita

  k → k-1 morte

- p. nascita e morte a tempo

  <u>discreto</u> $\{X_n \mid n \quad T\}$

  matrice delle probabilità di transizione

  P = $[p_{ij}]$ i,j ***N*** tridiagonale

  $p_{ij} \neq 0$, se j=i+1, i, i-1, $p_{ij}=0$ altrimenti

  <u>continuo</u> $\{X(t) \mid t \quad T\}$

  matrice delle velocità di transizione

  Q = $[q_{ij}]$ i,j ***N*** tridiagonale

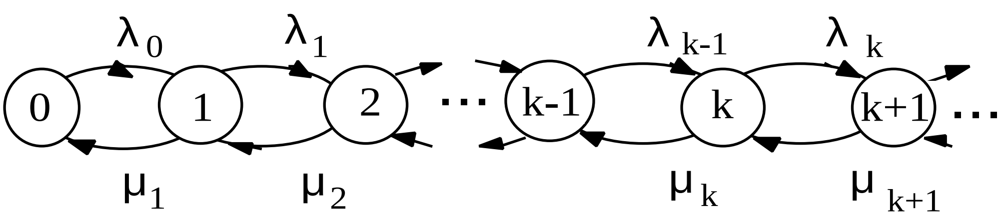
  $q_{ii+1}=\lambda_i$ tasso di nascita nello stato i

  $q_{ii-1}=\mu_i$ tasso di morte nello stato i

  $q_{ii}=-(\lambda_i+\mu_i)$

  $q_{ij}=0$ se $|i-j|>1$

  diagramma degli stati



- processo di nascita e morte : <u>soluzione stazionaria</u>

- probabilità stazionaria di stato

$\pi = [\ \pi_0\ \ \pi_1\ \ \pi_2 \ldots]$
$\pi Q = \mathbf{0}$

- $\pi_1 = \pi_0\ (\lambda_0 / \mu_1)$
  $\pi_2 = \pi_1\ (\lambda_1 / \mu_2) = \pi_0\ (\lambda_0\ \lambda_1) / (\mu_1\ \mu_2)$
  …
  $\pi_i = \pi_{i-1}\ (\lambda_{i-1} / \mu_i) = \pi_0\ (\lambda_0 \ldots \lambda_{i-1}) / (\mu_1 \ldots \mu_i)$

  con $\quad \pi\ \mathbf{1^T} = 1$

$$\boxed{\pi_i = \pi_0 \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}$$

$$\boxed{\pi_0 = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \right\}^{-1}}$$

- NOTA: esiste la soluzione stazionaria solo se $\pi_0 > 0$

- <u>Condizione Sufficiente</u> per la stazionarietà

$$\boxed{\exists\, k_0 \mid \forall\, k > k_0 \qquad \lambda_k < \mu_k}$$

- processo di nascita e morte : <u>soluzione transiente</u>

  distribuzione di probabilità di stato $\pi(t)$ al tempo $t>0$
  $\pi(t) = [\ \pi_0(t)\ \ \pi_1(t)\ \ \pi_2(t)\ ...]$

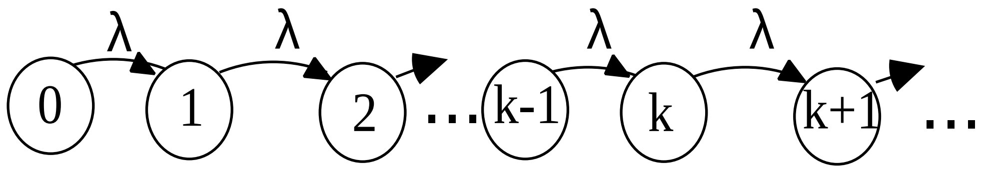
  sistema di equazioni differenziali

  $d\ \pi_i(t)/dt = \lambda_{i-1}\ \pi_{i-1}(t) + \mu_{i+1}\pi_{i+1}(t) - (\lambda_i+\mu_i)\pi_i(t) \quad i>0$
  $d\ \pi_0(t)/dt = \mu_1\pi_1(t) - \lambda_0\pi_0(t)$

  la cui soluzione si ottiene assumendo una distribuzione di probabilità di stato iniziale $\pi(0)$

- caso particolare: **processo di pura nascita**

  $\lambda_i=\lambda i\geq 0$
  $\mu_i=0 \quad i$



  con sistema inizialmente vuoto
  $\pi_0(0) =1 \ \ \pi_i(0)=0 \qquad i>0$

  $\pi_i(t)=\ e^{-\lambda t}\ (\lambda t)^t\ /i!\ \ i\geq 0,\ t\geq 0$

  processo di Poisson parametro λt
  media e varianza = λt

- caso particolare : <u>tasso di nascita e di morte costante</u>

$\lambda_i = \lambda \quad i \geq 0$
$\mu_i = \mu \quad i \geq 1$

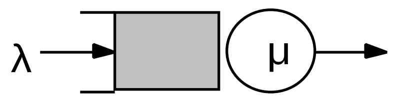
- condizione di stazionarietà: $\lambda < \mu$

- soluzione stazionaria
posto $\rho = \lambda / \mu$
$\pi_0 = [\sum_i \rho^i]^{-1} = 1 - \rho$
$\pi_i = \pi_0 (\lambda / \mu)^i$

$$\boxed{\pi_i = (1-\rho)\rho^i} \qquad i \geq 0$$

distribuzione geometrica di parametro ρ

- sistema M/M/1



tasso di arrivo λ
tasso di servizio μ

processo di arrivo di Poisson (λ)
tempo di interarrivo esponenziale (λ)
tempo di servizio esponenziale (μ) $E[t_S] = 1/\mu$
singolo servente

stato: numero di utenti nel sistema (q)
processo di nascita e morte con tassi costanti λ e μ

Condizione di stazionarietà del sistema : $\lambda < \mu$

$\rho = \lambda / \mu$

$\text{Prob}\{q = i\} = \pi_i = (1-\rho)\,\rho^i$

$E[q] = \pi_i = \rho / (1-\rho)$

$\text{Var}[q] = \rho / (1-\rho)^2$

da cui

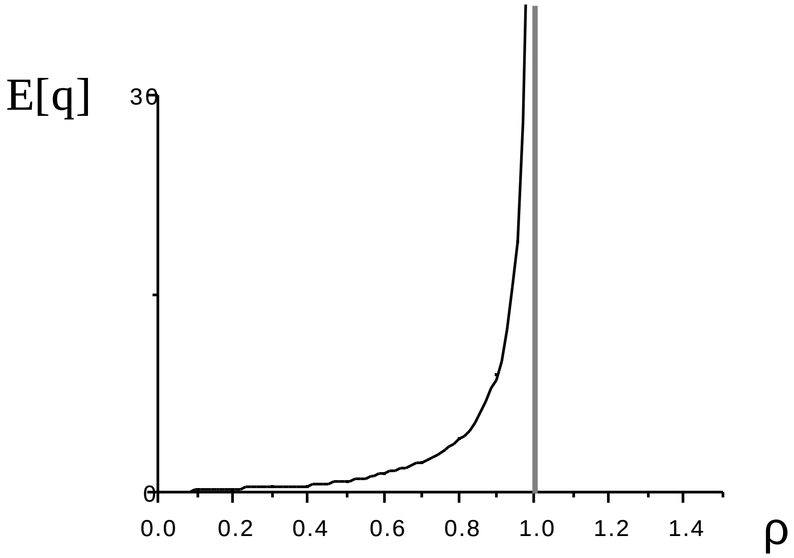
$E[w] = E[q] - E[s]= E[q] - \rho = \rho^2 / (1-\rho)$

$E[t_W] = (1/\mu)\, \rho / (1-\rho)$

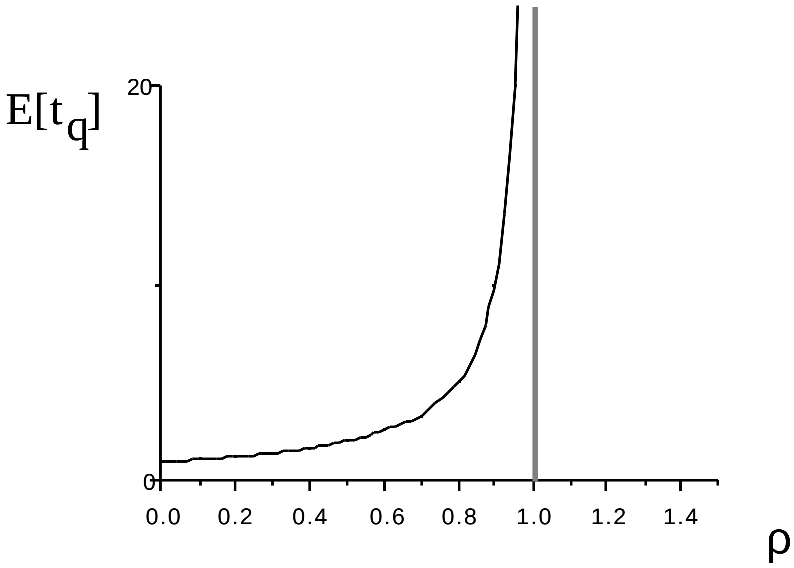
$E[t_q] = 1 / (\mu - \lambda)$

$X=\lambda$

$U = 1- \pi_0 =\rho$



numero medio di utenti in un sistema M/M/1 in funzione dell'intensità di traffico ρ



tempo medio di risposta in un sistema M/M/1 in funzione dell'intensità di traffico ρ

- Modelli basilari di code : sistema M/M/m

processo di arrivo di Poisson, (λ)
tempo di servizio esponenziale (μ)
  $E[t_s] = 1/\mu$ per ogni servente
$m \geq 1$ serventi identici

stato del sistema : q
soluzione del processo di nascita-morte associato

$\lambda_i = \lambda \quad i \geq 0$

$\mu_i = \min\{i,m\}\ \mu \qquad i \geq 1$

Condizione di stazionarietà: $\lambda < m\,\mu$

Intensità del traffico $\rho = \lambda / m\,\mu$
Soluzione stazionaria : $\pi_k = \text{Prob}\{q = k\} \qquad k \quad N$

$\pi_k = \pi_o\, (m\rho)^k / k! \quad 1 \leq k \leq m$

$\pi_k = \pi_o\, m^m \rho^k / m! \quad k > m$

$$\boxed{\pi_0 = \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(m\,\rho)^k}{k!} + \frac{(m\,\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}}$$

$E[q] = m\rho + \pi_m\, \rho / (1 - \rho)^2$

da cui

$E[w] = \pi_m\, \rho / (1 - \rho)^2$

$E[t_w] = \pi_m / ((1 - \rho)^2\, \mu)$

$E[t_q] = \pi_m / (m\,\mu\,(1 - \rho)^2) + 1 / \mu$
$X = \lambda$
$U = \rho$

- Modelli basilari di code : sistema M/M/∞

processo di arrivo di Poisson, (λ)
tempo di servizio esponenziale (μ)
$E[t_S] = 1/\mu$ per ogni servente
infiniti serventi identici : non esiste coda

stato del sistema : q
processo di nascita-morte

$$\lambda_i = \lambda \quad i \geq 0$$

$$\mu_i = i\,\mu \quad i \geq 1$$

sistema certamente stabile

Intensità del traffico $\rho = \lambda / \mu$
Soluzione stazionaria : π_k = Prob $\{q = k\}$ $k \quad N$

$$\pi_k = e^{-\rho} \rho^k / k! \qquad k \geq 0$$

distribuzione di Poisson (ρ)

da cui

$$E[q] = \rho$$
$$E[tq] = 1 / \mu$$
$$E[w] = E[t_W] = 0$$

$$X = \lambda$$
$$U = \rho$$

- Modelli basilari di coda : sistema M/G/1

  processo di arrivo di Poisson, (λ)
  tempo di servizio generale
     $E[t_S] = 1/\mu$ tempo medio di servizio
  singolo servente

  teorema di <u>Khintchine-Pollaczek</u>
  applicabile per qualsiasi disciplina di coda indipendente dal tempo di servizio

$$\boxed{E[q] = \rho + \frac{\rho^2(1+C_B)}{2(1-\rho)}}$$

  dove $C_B = (Var[t_S])^{1/2} / E[t_S]$
  da cui

$$E[q] = \lambda E[t_S] + E[w]$$

  $E[t_q]$ ed $E[t_w]$ dal teorema di Little dove $X=\lambda$, in condizioni di stabilità

- $E[q]$, $E[w]$, $E[t_q]$ ed $E[t_w]$ ρ C_B

- casi particolari:
  G=D Var$[t_S]$=0 C_B=0 $E[q] = \rho + \rho^2/2(1-\rho)$
  G=M Var$[t_S]$=$E[t_S]^2$ C_B=1 $E[q] = \rho/ (1 - \rho)$

- Caso particolare : sistema M/G/1 con disciplina PS (Processor Sharing)

  tutti gli utenti ricevono servizio contemporaneamente in ugual proporzione
  k utenti nel sistema : ognuno riceve il servizio con velocità μ/k

  soluzione stazionaria come nel sistema M/M/1 con gli stessi parametri medi di arrivo e servizio

  λ tasso di arrivo

  $E[t_S] = 1/\mu$

  $\pi_k = \rho^k (1 - \rho) \qquad k \geq 0$

  $E[q] = \rho / (1 - \rho)$

  $E[t_q] = 1 / (\mu - \lambda)$

  $X = \lambda$

  $U = \rho$