

Come usare la logica

per descrivere sistemi distribuiti in evoluzione

Damiano Macedonio

Dipartimento di Informatica, Università Ca' Foscari, Venezia

Venezia, 17 Aprile 2008



Che cos'è una formula?

Una **formula** esprime una **proprietà** che assume significato in uno specifico modello.

$$m \models \varphi$$

'm soddisfa φ '

'm ha la proprietà φ '

' φ è valida in m '



Formule Classiche

$$\varphi, \psi ::= p \mid \top \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \neg \varphi$$

Proiettano il linguaggio quotidiano a livello logico.

$m \models p$ se e solo se *lo decidiamo noi!*

$p \in \{ \text{'può stampare' 'è una stampante' 'è un router' 'è on-line' ...} \}$

$m \models \top$ se e solo se *sempre!*

\top è la formula soddisfatta da ogni sistema

$m \models \varphi \wedge \psi$ se e solo se $m \models \varphi$ e $m \models \psi$

Es. $m \models \text{'è una stampante'} \wedge \text{'è on-line'}$

$m \models \varphi \vee \psi$ se e solo se $m \models \varphi$ oppure $m \models \psi$

Es. $m \models \text{'è uno scanner'} \vee \text{'è una stampante'}$

$m \models \varphi \rightarrow \psi$ se e solo se $m \models \varphi$ implica $m \models \psi$

Es. $m \models \text{'è on-line'} \rightarrow \text{'può stampare'}$

$m \models \neg \varphi$ se e solo se non $m \models \varphi$

Come analizzare lo spazio

In un sistema distribuito ci possono essere più **locazioni**,
ogni locazione ha determinate proprietà.

$$\varphi, \psi ::= \dots \mid \varphi@loc \mid \blacklozenge \varphi \mid \blacksquare \varphi$$

Le formule proiettano le locazioni a livello logico

| | | |
|-----------------------------------|--------------|--|
| $m \models \varphi@loc$ | se e solo se | <u>la locazione</u> loc di m soddisfa φ Es. $m \models$ 'è una stampante'@a |
| $m \models \blacklozenge \varphi$ | se e solo se | <u>qualche locazione</u> di m soddisfa φ Es. $m \models \blacklozenge$ ('è una stampante' \wedge 'è on-line') |
| $m \models \blacksquare \varphi$ | se e solo se | <u>ogni locazione</u> di m soddisfa φ Es. $m \models \blacksquare$ ('può stampare') |

Come analizzare la struttura

Sistemi complessi possono essere generati dalla composizione di sotto-sistemi: $m = n_1 \cdot n_2$

$$\varphi, \psi ::= \dots \quad | \quad \varphi | \psi \quad | \quad \varphi \triangleright \psi$$

Le formule proiettano le strutture a livello logico

$m \models \varphi | \psi$ se e solo se $m = n_1 \cdot n_2$ e $n_1 \models \varphi$ e $n_2 \models \psi$

Es. $m \models$ *'è una stampante'* | *'è uno scanner'* | T

$m \models \varphi \triangleright \psi$ se e solo se per ogni n tale che $n \models \varphi$

si ha $m \cdot n \models \psi$

Es. $m \models$ *'è un router'* \triangleright *'è on-line'*



Come analizzare l'evoluzione

Un sistema distribuito può evolvere: $m \rightarrow m'$

$$\varphi, \psi ::= \dots \mid \circ \varphi \mid \diamond \varphi \mid \square \varphi$$

Le formule proiettano l'evoluzione a livello logico

$m \models \circ \varphi$ se e solo se $m \rightarrow m' \text{ e } m' \models \varphi$

Es. $m \models \circ$ 'è on-line'

$m \models \diamond \varphi$ se e solo se $m \rightarrow \dots \rightarrow m' \text{ e } m' \models \varphi$

Es. $m \models \diamond$ 'è on-line'

$m \models \square \varphi$ se e solo se per ogni m' tale che $m \rightarrow \dots \rightarrow m'$
vale $m' \models \varphi$

Es. $m \models \square$ 'è on-line'

Decidibilità

- ▶ Una formula può esprimere molto in dettaglio le caratteristiche del sistema che stiamo osservando.
- ▶ Per verificare che un sistema m gode di una determinata proprietà, basta che la esprimiamo con una formula φ e ci chiediamo se

$$m \models \varphi$$

- ▶ ma... per avere una risposta, la relazione \models deve essere verificabile, ovvero **decidibile**.

Problema: decidibilità della logica.

Trovare dei buoni algoritmi che rispondano alla domanda “ $m \models \varphi$?” o, se si dimostra che non è possibile, isolare dei frammenti decidibili della logica.



Espressività

Inforchiamo gli occhiali della logica.

- ▶ Il linguaggio logico può distinguere gli oggetti solo attraverso le formule.
- ▶ Due sistemi m_1 e m_2 sono diversi se esiste una formula che li distingue, ovvero se esiste φ tale che $m_1 \models \varphi$ e $m_2 \not\models \varphi$.
- ▶ Ma se per ogni φ si ha $m_1 \models \varphi$ *se e solo se* $m_2 \models \varphi$ allora dobbiamo concludere che i due sistemi m_1 e m_2 sono *logicamente* equivalenti.

Problema: studio della espressività.

Quale è l'equivalenza indotta dalla logica?

- ▶ sistemi identici sintatticamente
- ▶ sistemi identici strutturalmente
- ▶ sistemi identici nel comportamento

La logica può essere più o meno espressiva. Serve un compromesso tra espressività e decidibilità.

