Come usare la logica

per descrivere sistemi distribuiti in evoluzione

Damiano Macedonio

Dipartimento di Informatica, Università Ca' Foscari, Venezia

Venezia, 17 Aprile 2008

Che cos'è una formula?

Una formula esprime una proprietà che assume significato in uno specifico modello.

$m \models \varphi$ '*m soddisfa* φ'

'*m ha la proprietà* φ'

'φ *è valida in m*'

Formule Classiche

$$\varphi, \psi ::= \quad p \quad | \quad \top \quad | \quad \varphi \wedge \psi \quad | \quad \varphi \vee \psi \quad | \quad \varphi \rightarrow \psi \quad | \quad \neg\varphi$$

Proiettano il linguaggio quotidiano a livello logico.

$m \models p$ se e solo se *lo decidiamo noi!*

$p \in \{$ *'può stampare' 'è una stampante' 'è un router' 'è on-line'* $\ldots\}$

$m \models \top$ se e solo se *sempre!*

$\top$ è la formula soddisfatta da ogni sistema

$m \models \varphi \wedge \psi$ se e solo se $m \models \varphi$ *e* $m \models \psi$

Es. $m \models$ *'è una stampante'* $\wedge$ *'è on-line'*

$m \models \varphi \vee \psi$ se e solo se $m \models \varphi$ *oppure* $m \models \psi$

Es. $m \models$ *'è uno scanner'* $\vee$ *'è una stampante'*

$m \models \varphi \rightarrow \psi$ se e solo se $m \models \varphi$ *implica* $m \models \psi$

Es. $m \models$ *'è on-line'* $\rightarrow$ *'può stampare'*

$m \models \neg\varphi$ se e solo se *non* $m \models \varphi$

Come analizzare lo spazio

In un sistema distribuito ci possono essere più locazioni, ogni locazione ha determinate proprietà.

$$\varphi, \psi ::= \ldots \quad | \quad \varphi @ loc \quad | \quad \blacklozenge\, \varphi \quad | \quad \blacksquare\, \varphi$$

Le formule proiettano le locazioni a livello logico

$m \models \varphi @ loc$ se e solo se *la locazione loc di m soddisfa* φ

Es. $m \models$ *'è una stampante'@a*

$m \models \blacklozenge\, \varphi$ se e solo se *qualche locazione di m soddisfa* φ

Es. $m \models \blacklozenge$ (*'è una stampante'* $\wedge$ *'è on-line'*)

$m \models \blacksquare\, \varphi$ se e solo se *ogni locazione di m soddisfa* φ

Es. $m \models \blacksquare$ (*'può stampare'*)

Come analizzare la struttura

Sistemi complessi possono essere generati dalla composizione di sotto-sistemi: $m = n_1 \cdot n_2$

$$\varphi, \psi ::= \ldots \quad | \quad \varphi \mid \psi \quad | \quad \varphi \rhd \psi$$

Le formule proiettano le strutture a livello logico

$m \models \varphi \mid \psi$ se e solo se $m = n_1 \cdot n_2$ $\underline{e}$ $n_1 \models \varphi$ $\underline{e}$ $n_2 \models \psi$

Es. $m \models$ *'è una stampante'* | *'è uno scanner'* $\mid \top$

$m \models \varphi \rhd \psi$ se e solo se <u>per ogni</u> n <u>tale che</u> $n \models \varphi$ <u>si ha</u> $m \cdot n \models \psi$

Es. $m \models$ *'è un router'* $\rhd$ *'è on-line'*

Come analizzare l'evoluzione

Un sistema distribuito può evolvere: $m \longrightarrow m'$

$$\varphi, \psi ::= \ldots \quad | \quad \circ\, \varphi \quad | \quad \Diamond\, \varphi \quad | \quad \Box\, \varphi$$

Le formule proiettano l'evoluzione a livello logico

$m \models \circ\, \varphi$ se e solo se $m \longrightarrow m'$ e $m' \models \varphi$

Es. $m \models \circ$ *'è on-line'*

$m \models \Diamond\, \varphi$ se e solo se $m \longrightarrow \ldots \longrightarrow m'$ e $m' \models \varphi$

Es. $m \models \Diamond$ *'è on-line'*

$m \models \Box\, \varphi$ se e solo se per ogni m' tale che $m \longrightarrow \ldots \longrightarrow m'$ vale $m' \models \varphi$

Es. $m \models \Box$ *'è on-line'*

Decidibilità

- Una formula può esprimere molto in dettaglio le caratteristiche del sistema che stiamo osservando.
- Per verificare che un sistema m gode di una determinata proprietà, basta che la esprimiamo con una formula φ e ci chiediamo se

$$m \models \varphi$$

- ma... per avere una risposta, la relazione $\models$ deve essere verificabile, ovvero decidibile.

Problema: decidibilità della logica.
Trovare dei buoni algoritmi che rispondano alla domanda "$m \models \varphi$?" o, se si dimostra che non è possibile, isolare dei frammenti decidibili della logica.

Espressività

Inforchiamo gli occhiali della logica.

- Il linguaggio logico può distinguere gli oggetti solo attraverso le formule.
- Due sistemi m_1 e m_2 sono diversi se esiste una formula che li distingue, ovvero se esiste φ tale che $m_1 \models \varphi$ e $m_2 \not\models \varphi$.
- Ma se per ogni φ si ha $m_1 \models \varphi$ *se e solo se* $m_2 \models \varphi$ allora dobbiamo concludere che i due sistemi m_1 e m_2 sono *logicamente* equivalenti.

Problema: studio della espressività.
Quale è l'equivalenza indotta dalla logica?

- sistemi identici sintatticamente
- sistemi identici strutturalmente
- sistemi identici nel comportamento

La logica può essere più o meno espressiva. Serve un compromesso tra espressività e decidibilità.